## 7.5.23 Kulová plocha

**Předpoklady:** 7501

**Pedagogická poznámka:** Celý obsah se za hodinu stihnout nedá.

Kulová plocha = „kružnice“ v prostoru.

**Př. 1:** Vyslov definici kulové plochy.

Kulová plocha je množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu (středu kulové plochy) danou vzdálenost (poloměr kulové plochy).

Jak bude vypadat rovnice kulové plochy se středem $S[m;n;p]$ a poloměrem $r$?

Vyjdeme z definice (jako u kružnice): Bod $X[x;y;z]$ leží na kulové ploše, právě když platí $|XS| = r$. Dosadíme vzorec pro vzdálenost:

$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2} = r \quad /^2$ umocníme, abychom se zbavili odmocniny.

$(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2 = r^2$

Z rovnice je možné ihned určit souřadnice středu $\Rightarrow$ **středová rovnice kulové plochy**.

**Př. 2:** Napiš středovou rovnici kulové plochy se středem v bodě $S[2;1;-2]$ a poloměrem 3.

Jenom dosadíme do rovnice: $(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2 = r^2$.

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 9$

Stejně jako u kružnice je možné převést středovou rovnici na obecnou.

$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2+4z+4 = 9$

$x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z = 0$ - **obecná rovnice kulové plochy**

Obecná rovnice kulové plochy má stejné výhody i nevýhody jako obecná rovnice kružnice. Není zcela jasné, kde je její střed a jaký je její poloměr, ale pro některá dosazování je vhodnější.

**Př. 3:** Najdi průsečíky kulové plochy $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z = 0$ s osami soustavy souřadnic.

Průsečíky s osou $x$ $\Rightarrow$ body na ose $x$, tedy body se souřadnicemi $[x;0;0]$ $\Rightarrow$ dosadíme do rovnice kulové plochy: $x^2+0^2+0^2-4x-2\cdot 0+4\cdot 0 = 0$.

$x^2-4x = 0$

$(x-4)x = 0$

$\Rightarrow$ Kulová plocha se s osou $x$ protíná v bodech $X_1[0;0;0]$ a $X_2[4;0;0]$.

Průsečíky s osou $y$ $\Rightarrow$ body na ose $y$, tedy body se souřadnicemi $[0;y;0]$ $\Rightarrow$ dosadíme do rovnice kulové plochy: $0^2+y^2+0^2-4\cdot0-2y+4\cdot0=0$.

$y^2-2y=0$

$(y-2)y=0$

$\Rightarrow$ Kulová plocha se s osou $y$ protíná v bodech $Y_1[0;0;0]$ a $Y_2[4;0;0]$.

Průsečíky s osou $z$ $\Rightarrow$ body na ose $z$, tedy body se souřadnicemi $[0;0;z]$ $\Rightarrow$ dosadíme do rovnice kulové plochy: $0^2+0^2+z^2-4\cdot0-2\cdot0+4z=0$.

$z^2+4z=0$

$(z+4)z=0$

$\Rightarrow$ Kulová plocha se s osou $z$ protíná v bodech $Z_1[0;0;0]$ a $Z_2[4;0;0]$.

Pokud se z obecné rovnice potřebujeme dozvědět střed a poloměr kulové plochy, nejistější cestou je úprava na středový tvar.

**Př. 4:** Urči střed a poloměr kulové plochy dané obecnou rovnicí:
a) $x^2+y^2+z^2-2x+6z+2=0$, b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+36=0$,
c) $x^2+y^2+z^2-3x+y-4z+1=0$.

a)

$x^2+y^2+z^2-2x+6z+2=x^2-2x+1-1+y^2+z^2+2z\cdot3+3^2-3^2+2=$

$=(x-1)^2+y^2+(z+3)^2-8=0$

$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=8 \quad \Rightarrow \quad S[1;0;-3]$, $r=\sqrt{8}$

b)

$x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+36=x^2-2x\cdot2+2^2-2^2+y^2+2y+1-1+z^2-2z\cdot4+4^2-4^2+36=$

$=(x-2)^2-2^2+(y+1)^2-1+(z-4)^2-4^2+36=0$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=-15$ Nejde o rovnici kulové plochy (poloměr nemůže být záporný) $\Rightarrow$ stejně jako u kružnice platí, že ne každá rovnice, která se tváří jako obecná rovnice kulové plochy, jí doopravdy je.

c)

$x^2+y^2+z^2-3x+y-4z+1=$

$$=x^2-2x\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2+2y\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+z^2-2z\cdot2+2^2-2^2+1=$$

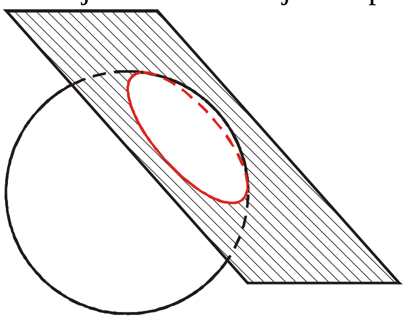
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+(z-2)^2-4+1=0$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)+(z-2)^2=\frac{11}{2} \quad \Rightarrow \quad S\left[\frac{3}{2};-\frac{1}{2};2\right],\ r=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

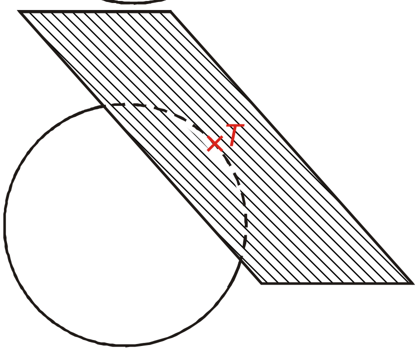
Stejně jako u kružnice můžeme i u kulové plochy hledat průsečíky. Tentokrát jsme v prostoru a máme k dispozici kromě přímky i rovinu.

**Př. 5:** Jaké jsou možnosti vzájemné polohy kulové plochy a roviny? Která vzdálenost rozhoduje o této poloze?

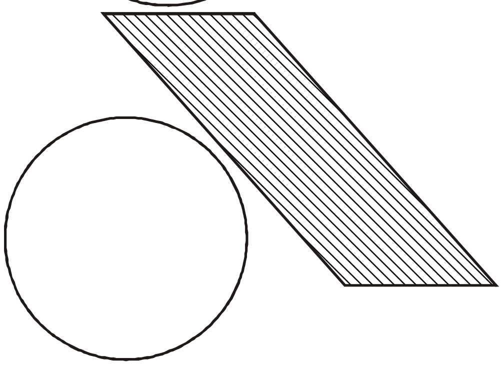
Vzájemná poloha je určena vzdáleností roviny od středu kulové plochy.
$\Rightarrow$ Existují tři možné vzájemné polohy kulové plochy a roviny:



Vzdálenost roviny od středu kulové plochy je menší než její poloměr $\Rightarrow$ průnikem kulové plochy s rovinou je kružnice.




Vzdálenost roviny od středu kulové plochy je rovna jejímu poloměru $\Rightarrow$ průnikem kulové plochy s rovinou je bod (bod dotyku), rovině říkáme **tečná rovina**.



Vzdálenost roviny od středu kulové plochy je větší než její poloměr $\Rightarrow$ kulová plocha nemá s rovinou žádný společný bod.

**Př. 6:** Je dána kulová plocha $S[1;2;-1]$ $r=3$ a rovina $2x+y-2z+d=0$. Pro které hodnoty parametru $d$ je má je průsečíkem kulové plochy s rovinou kružnice?

Nebudeme počítat společné body, ale určíme si vzdálenost roviny od středu kružnice:

Vzorec pro vzdálenost bodu od roviny: $|S\rho| = \frac{|2x+y-2z+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$.

Hledáme, kdy je vzdálenost roviny od středu menší než 3.

Dosadíme do rovnice střed kružnice: $\frac{|2\cdot 1+2-2(-1)+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3$.

$\dfrac{|6+d|}{3}=3$

$|d-(-6)|=9 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od čísla –6 o 9 $\Rightarrow$ dvě řešení (podle očekávání):

- $d_1=3 \Rightarrow$ tečná rovina $2x+y-2z+3=0$,
- $d_2=-15 \Rightarrow$ tečná rovina $2x+y-2z-15=0$.

Kružnice je průsečíkem kulové plochy s rovinou $2x+y-2z+d=0$ pokud hodnota parametru $d$ náleží do intervalu $(-15;3)$.

**Př. 7:** Najdi tečnou rovinu kulové plochy $(x-2)^2+(y+1)^2+(x-4)^2=36$ v jejím bodě $T[-2;3;6]$.

Využijeme kolmosti tečné roviny procházející bodem $T$ na vektor $ST$ (analogie kolmosti tečny v bodě $T$ na vektor $ST$ u kružnice) $\Rightarrow$ vektor $ST$ je normálovým vektorem hledané roviny.

Střed kulové plochy: $S[2;-1;4]$.

$T-S=(-4;4;2) \Rightarrow \boldsymbol{n}_\rho=(2;-2;-1)$.

Obecná rovnice roviny: $2x-2y-z+d=0$.

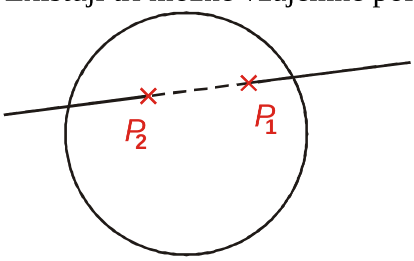
Dosadíme bod $T$: $2(-2)-2\cdot 3-6+d=0 \Rightarrow d=16$.

Hledanou tečnou rovinou je rovina $2x-2y-z-16=0$.

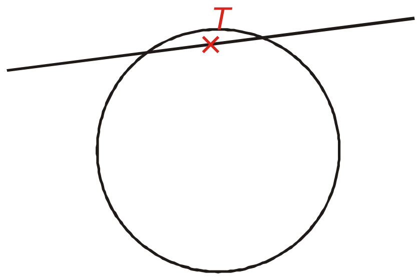
**Dodatek:** Protože kulová plocha je opravdu analogií kružnice v prostoru, existuje i rovnice tečné roviny kulové plochy. Její tvar odpovídá tvaru rovnice tečny pro kružnici. Vzorec vypadá takto $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)+(z_0-p)(z-p)=r^2$.
Vzhledem k tomu, že je rovinu možné vypočítat rychleji pomocí normálového vektoru $ST$, je snaha o zapamatování vzorce víc než zbytečná.

**Př. 8:** Jaké jsou možnosti vzájemné polohy kulové plochy a přímky? Která vzdálenost rozhoduje o této poloze?

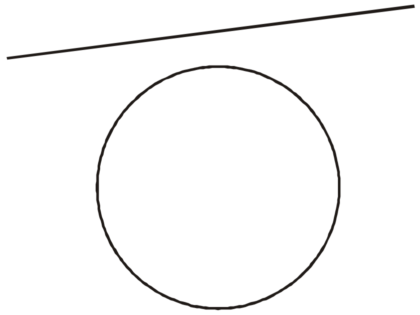
Vzájemná poloha je určena vzdáleností přímky od středu kulové plochy.
$\Rightarrow$ Existují tři možné vzájemné polohy kulové plochy a přímky:




Vzdálenost přímky od středu kulové plochy je menší než její poloměr $\Rightarrow$ průnikem kulové plochy s přímkou jsou dva body.




Vzdálenost přímky od středu kulové plochy je rovna jejímu poloměru $\Rightarrow$ průnikem kulové plochy s přímkou je bod (bod dotyku), přímce říkáme **tečna**.



Vzdálenost přímky od středu kulové plochy je větší než její poloměr $\Rightarrow$ kulová plocha nemá s přímkou žádný společný bod.

**Př. 9:** Najdi průsečíky přímky $KL$ s kulovou plochou $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$. Podle jejich počtu urči vzájemnou polohu přímky s kulovou plochou. $K[1;6;-5]$, $L[0;7;-9]$.

Vyjádříme přímku $KL$ a pak dosadíme do rovnice kulové plochy.

Směrový vektor: $K-L=(1;-1;4)$ $\Rightarrow$ parametrické vyjádření: $\begin{array}{l} x=1+t \\ y=6-t \\ z=-5+4t, t\in R \end{array}$.

Dosadíme za jednotlivé souřadnice do rovnice kulové plochy:

$(1+t-1)^2+(6-t-3)^2+(-5+4t-1)^2=9$

$t^2+(3-t)^2+(4t-6)^2=9$

$t^2+9+6t+t^2+16t^2-48t+36=9$

$18t^2-54t+36=0 \quad /:18$

$t^2-3t+2=0$

$(t-2)(t-1)=0$ $\Rightarrow$ dva průsečíky:

- $t=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1+1=2 \\ y=6-1=5 \\ z=-5+4\cdot 1=-1 \end{array} \Rightarrow P_1[2;5;-1]$,
- $t=2 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1+2=3 \\ y=6-2=4 \\ z=-5+4\cdot 2=3 \end{array} \Rightarrow P_2[3;4;3]$.

Přímka $KL$ má s kulovou plochou dva průsečíky $P_1[2;5;-1]$ a $P_2[3;4;3]$.

**Shrnutí:** Analogií kružnice v prostoru je kulová plocha, proto jsou všechny zákonitosti podobné.